Projenin Adı: Parabolde Hacim Hesabına Alternatif Bir Yaklaşım

Amaç:

$f(x) = \mathrm{a}x^2 + bx + c$ parabolü ile bu parabolü iki noktada kesen $y = m$ doğrusu arasında kalan bölgenin $y = m$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini integral kullanmadan hesaplayıp, bu hacmi bu bölgeye çizilebilecek en büyük alanlı üçgenin $y = m$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi ile karşılaştırmak

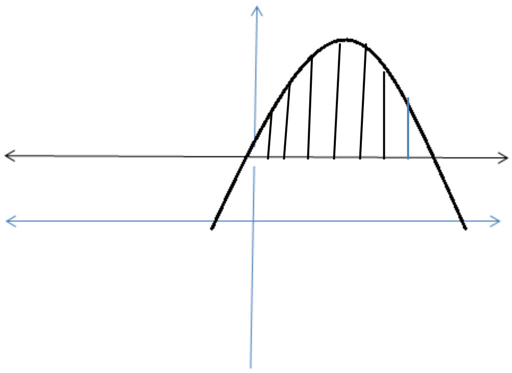
İçindekiler:

Sayfa No

1. Giriş:

İkinci dereceden bir polinom ile bir doğrunun arasında kalan bölgenin alanını bu bölgeye çizilebilecek en büyük alanlı üçgenin alanından yararlanarak hesaplamak için literatür çalışmasına başladığımızda M.Ö. 3.yüzyılda Arşimet'in arkadaşı Dositheus'a parabollerle ilgili 24 yardımcı teoremden oluşan bir mektup yazdığını, bu mektupta Arşimet'in bir parabol ile bir doğru arasındaki alanı bulmada benzerlikten yararlanılabileceğini ortaya koyduğunu ve bu üçgenin alanı A olmak üzere parabol ile doğru arasında kalan alanın $\frac{4}{3}A$ ya eşit olacağını benzerlik ilişkileri ile ortaya koyduğunu gördük. Bunun üzerine $f(\mathrm{x}) = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = m$ doğrusu arasında kalan bölgenin $y = m$ doğrusu etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bu bölgeye çizilebilecek ve "içsel üçgen" olarak adlandıracağımız en büyük alanlı üçgenin $y = m$ doğrusu etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi ile karşılaştırdık. Bu esnada parabol ile doğrusu arasında kalan bölgenin $y = m$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini diskriminant türünden ifade edebileceğimizi de gördük.

2. Yöntem:



İlk olarak $f(\mathrm{x}) = ax^2 + bx + c$ parabolü ile $y = m$ doğrusu arasında kalan bölgenin $y = m$ doğrusu etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulalım.

$ax^2 + bx + c = m \Rightarrow ax^2 + bx + c - m = 0$ denkleminin kökleri x_1 ve x_2 olsun. Bu durumda şekilde görülen kapalı bölgenin $y = m$ doğrusu etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan cismin hacmine H dersek

$$H = \int_{x_1}^{x_2} \left(ax^2 + bx + c - m\right)^2 dx$$

olup işlemlerimizde kolaylık sağlaması için $c - m = d$ diyelim

$$H = \pi \int_{x_1}^{x_2} \left(ax^2 + bx + d\right)^2 dx = \pi \int_{x_1}^{x_2} \left[a^2x^4 + b^2x^2 + d^2 + 2\left(abx^3 + adx^2 + bdx\right)\right] dx$$

$$= \pi\left(x_2 - x_1\right)\left[\frac{a^2}{5}\left(x_2^4 + x_2^3x_1 + x_2^2x_1^2 + x_2x_1^3 + x_1^4\right) + \frac{ab}{2}\left(x_2^3 + x_2^2x_1 + x_2x_1^2 + x_1^3\right)\right.$$

$$\left. + \frac{b^2 + 2ad}{3}\left(x_2^2 + xx_1 + x_1^2\right) + bd\left(x_2 + x_1\right) + d^2\right]$$

$$= \pi\left(x_2 - x_1\right)\left\{\frac{a^2}{5}\left[\left(x_2 + x_1\right)\left(x_2^3 + x_1^3\right) + \left(x_2x_1\right)^2\right] + \frac{ab}{2}\left(x_2 + x_1\right)\left(x_2^2 + x_1^2\right) + \frac{b^2 + 2ad}{3}\left(x_2^2 + xx_1 + x_1^2\right)\right.$$

$$\left. + bd\left(x_2 + x_1\right) + d^2\right\}$$

olup vieta teoremleri ile gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$H=\pi\left(x_2-x_1\right)\left\{\frac{a^2}{5}\left[-\frac{b}{a}\left(\left(x_2+x_1\right)^3-3x_1x_2(x_2+x_1)\right)+\frac{d^2}{a^2}\right]+\frac{ab}{2}\left[\left(x_2+x_1\right)\left(\left(x_2+x_1\right)^2-2x_1x_2\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{b^2+2ad}{3}\left(\left(x_2+x_1\right)^2-x_1x_2\right)+bd(x_2+x_1)+d^2\right\}$$

$$=\pi\left(x_2-x_1\right)\left\{\frac{a^2}{5}\left[-\frac{b}{a}.\frac{\left(-b^3+3abd\right)}{a^3}+\frac{d^2}{a^2}\right]-\frac{b^2}{2}.\frac{b^2-2ad}{a^2}+\frac{\left(b^2+2ad\right)\left(b^2-ad\right)}{3a^2}-\frac{b^2d-ad^2}{a}\right\}$$

$$=\pi\left(x_2-x_1\right)\left\{\frac{b^4-3ab^2d+a^2d^2}{5a^2}-\frac{b^4-2ab^2d}{2a^2}+\frac{b^4+ab^2d-2a^2d^2}{3a^2}-\frac{b^2d-a^2d^2}{a^2}\right\}$$

olur. Burada payda eşitleyip gerekli sadeleştirmeleri yaptığımızda da

$$H=\pi\left(x_2-x_1\right)\left\{\frac{b^4-8ab^2d+16a^2d^2}{30a^2}\right\}=\frac{\pi\left(x_2-x_1\right)}{30}\left(\frac{b^2-4ad}{a}\right)^2$$

buluruz.

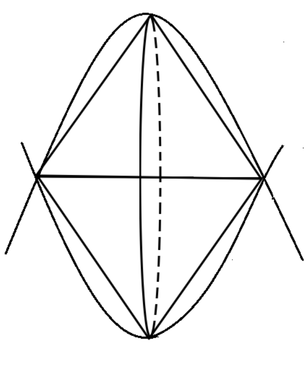
$$\Delta=b^2-4ad \text{ ve } \left|x_2-x_1\right|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

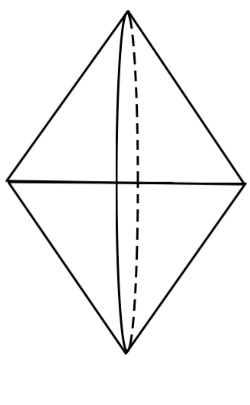
bağıntılarını dikkate aldığımızda ise

$$H=\frac{\pi}{30}.\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{a^3}$$

eşitliğini elde etmiş oluruz.

Şimdide bu ifadeyi parabolün içsel üçgeninin $y=m$ doğrusu etrafında 360° döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi ile karşılaştıralım. Bu cisim taban tabana birleştirilmiş iki eş koniden oluşur.





Bu cismin hacmine V dersek

$$V = 2.\frac{1}{3}\pi k^2 \frac{(x_2 - x_1)}{2} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)^2 \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \frac{1}{3}\pi\frac{\Delta^2}{16a^2}.\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{a} = \frac{\pi}{48a^3}\Delta^{\frac{5}{2}}$$

olur.

$$\frac{H}{V} = \frac{\frac{\pi}{30a^3}\Delta^{\frac{5}{2}}}{\frac{\pi}{48a^3}\Delta^{\frac{5}{2}}} = \frac{8}{5}$$

bulmuş oluruz.

Örnek 1:

$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ parabolünün x ekseni etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulalım

Çözüm:

<u>I.Yöntem</u>

$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ parabolünün x ekseni etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulmak için önce $2x^2 - 2x + 1 = 0$ denkleminin köklerini

$$2x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4.2.1 = 8 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \mp 2\sqrt{2}}{4} = \frac{2 \mp \sqrt{2}}{2}$$

şeklinde buluruz. Bu durumda bulmak istediğimiz hacim

$$H = \pi \int_{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \left(2x^2 - 2x + 1\right)^2 dx = \pi \int_{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \left(4x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 4x + 1\right) dx$$

$$= \pi \left(\frac{4}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + x \Bigg|_{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$= \pi \left\{ \frac{4}{5}\left[\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^5 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^5\right] - 2\left[\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^4\right]\right.$$

$$\left. + \frac{8}{3}\left[\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^3\right] - 2\left[\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] + \sqrt{2} \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada gerekli işlemleri yaptığımızda ise

$$H = \frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

olarak bulmuş oluruz.

II. Yöntem

$2x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin diskriminantı $\Delta = 8$ olup $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ parabolünün x ekseni etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi

$$H = \frac{\pi}{30} \cdot \frac{8^{\frac{5}{2}}}{2^3} = \frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

bulunur.

III. Yöntem

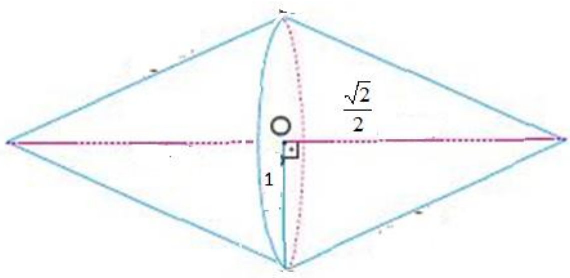
$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ parabolünün içsel üçgenini x ekseni etrafında 360^0 döndürdüğümüzde oluşan birleşik koninin taban yarıçapı

$$r = \left| \frac{4.2.1 - (-4)^2}{4.2} \right| = 1$$

yüksekliği ise

$$h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} - \frac{2-\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

bulunur.



Tabanlarından birleşik bu iki eş koninin hacmi ise

$$V = 2.\frac{1}{3}.\pi.1^2\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\pi$$

olarak elde edilir.

$$\frac{H}{V} = \frac{8}{5}$$

olduğundan

$$H = \frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

olur.

Örnek 2:

$f(x) = x^2 - 2x - 2$ parabolünün $y = 1$ doğrusu etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulalım

Çözüm:

<u>I.Yöntem</u>

$f(x) = x^2 - 2x - 2$ parabolünün $y = 1$ doğrusu etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacmini bulmak için önce $x^2 - 2x - 3 = 0$ denkleminin köklerini

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$

şeklinde buluruz. Bu durumda bulmak istediğimiz hacim

$$\begin{aligned} H &= \pi\int_{-1}^{3}\left(x^2 - 2x - 3\right)^2 dx = \pi\int_{-1}^{3}\left(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9\right)dx \\ &= \pi\left(\frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 6x^2 + 9x\Big|_{-1}^{3}\right) \\ &= \frac{512\pi}{15} \end{aligned}$$

bulunur.

II. Yöntem

$x^2-2x-3=0$ denkleminin diskriminantı $\Delta=16$ olup $f(x)=x^2-2x-2$ parabolünün $y=1$ doğrusu etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi

$$H=\frac{\pi}{30}.16^{\frac{5}{2}}=\frac{512}{15}\pi$$

bulunur.

III. Yöntem

$f(x)=x^2-2x-2$ parabolü ile $y=1$ doğrusu arasında kalan bölgenin içsel üçgenini $y=1$ doğrusu etrafında 360^0 döndürdüğümüzde oluşan birleşik koninin taban yarıçapı

$$r=\left|\frac{4.1.(-3)-\left(-2\right)^2}{4.1}\right|=4$$

yüksekliği ise

$$h=\frac{3-(-1)}{2}=2$$

bulunur. Buradan da bu şeklin hacmi

$$V=2.\frac{1}{3}.\pi.4^2.2=\frac{64}{3}\pi$$

elde edilir.

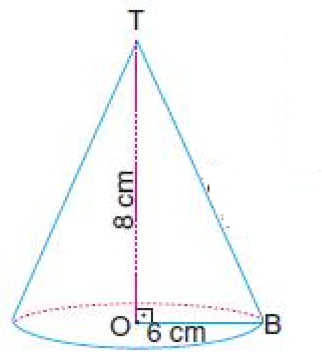
$$\frac{H}{V}=\frac{8}{5}$$

olduğundan

$$H=\frac{512}{15}\pi$$

olur.

Örnek 2:



Şekildeki koninin hacmini hesaplayalım.

Çözüm:

I.Yöntem

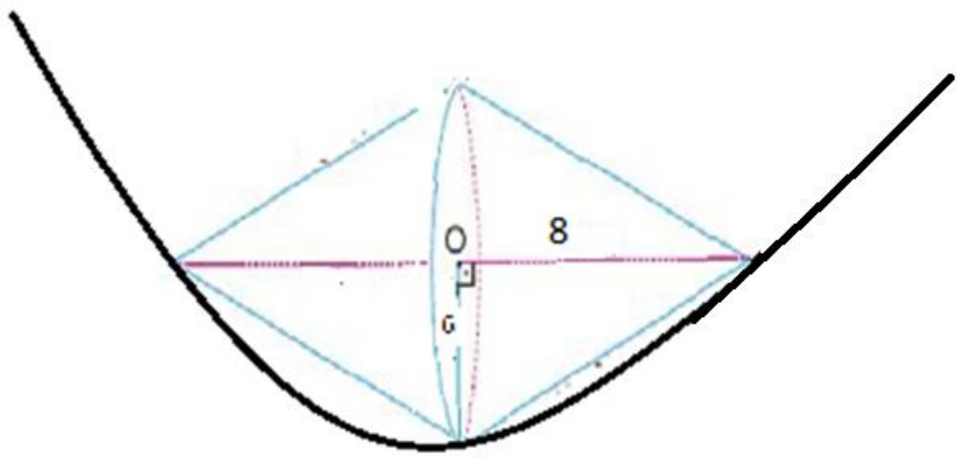
Kürenin hacim formülünden kolayca

$$V = \frac{1}{3}.\pi.6^2.8 = 96\pi$$

şeklinde hesaplanabilir.

II. Yöntem

Koniye eş başka bir koni ile taban tabana birleştirirsek



$$\frac{x_2 - x_1}{2} = 8 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 16 \Rightarrow \Delta = 256a^2$$

ve

$$\left|\frac{4ac-b^2}{4a}\right| = 6 \Rightarrow \Delta = 24|a|$$

olacağından

$$a=\frac{3}{32} \text{ buradan da } \Delta=\frac{9}{4}$$

bulunur. Buradan da

$$V=\frac{1}{2}.\frac{\pi}{48}\frac{\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{3}{32}\right)^{3}}=96\pi$$

elde edilmiş olur.

5. Sonuç ve Tartışma:

1. $ax^2+bx+c-m=0$ denkleminin diskriminantı Δ olmak üzere $f(x)=ax^2+bx+c$ parabolünün $y=m$ doğrusu etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi

$$H=\frac{\pi}{30}.\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{a^3}$$

bulunmuştur.

2. $f(x)=ax^2+bx+c$ parabolünün $y=m$ doğrusu etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacmi

$$V=\frac{\pi}{48a^3}\Delta^{\frac{5}{2}}$$

elde edilmiştir

3. $f(x)=ax^2+bx+c$ parabolünün $y=m$ doğrusu etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacminin, bu parabolün içsel üçgeninin $y=m$ doğrusu etrafında 360^0 döndürülmesi ile oluşan cismin hacmine oranı

$$\frac{H}{V}=\frac{8}{5}$$

olarak hesaplanmıştır.

Kaynaklar:

[1] Swain, Gordon and Thomas Dence (April 1998). "*Archimedes' Quadrature of the Parabola Revisited*". *Mathematics Magazine* 71 (2): 123 –30. doi: 10.2307/2691014.JSTOR 2691014

[2] Thomas, G.; Finney, R. (1996) *"Calculus and Analytic Geometry"* (9th ed.) Addison Wesley, ISBN 0-201-53174-7

[3] Metin G., Ercan M., Tutar A. (2014) "İntegral Fasikülü", Metin Yayınları, Ankara

[4] Tozman P., Oral E., Oruçlar S., Kaçar Y. (2015). "Geometri 12.Sınıf Ders Kitabı", MEB., Ankara