PROJE RAPORU

Projenin Adı: Köşeleri Elips Üzerinde Bulunan Eşkenar Üçgenler

Amaç:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi içine çizilebilecek, köşeleri bu elips üzerinde bulunan eşkenar üçgenleri tespit etmek ve bu üçgenlerin bazı değerlerini(alan,çevre) hesaplamak

Giriş

Verilen iki noktaya uzaklıkları toplamı sabit olan noktaların geometrik yerine elips dendiğini ve orjin merkezli bir elipsin kartezyen denkleminin $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ şeklinde olduğunu biliyoruz.

Bu çalışmada köşeleri $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi üzerinde olacak şekilde oluşturulabilen eşkenar üçgenlerin köşeleri sırasıyla $A(x_1,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ ve $\mathrm{C}(x_3,y_3)$ alınıp $|AB|=|AC|=|BC|$ eşitlikleri ve elips denklemi kullanılarak oluşturulabilcek eşkenar üçgenlerin köşe noktalarının koordinatları bulunmaya, buradan hareketle de üçgenlerin çevreleri ve alanları hesaplanmaya çalışılmıştır.

Yöntem:

Köşeleri $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi üzerinde bulunan ABC üçgeninin köşeleri $A(x_1,y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,y_2)$ ve $\mathrm{C}(x_3,y_3)$ alınıp $|AB|=|AC|=|BC|$ eşitlikleri kullanılarak elde edilen

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2=(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned}
x_2^2-2x_1x_2+x_1^2+y_2^2-2y_1y_2+y_1^2 &= x_3^2-2x_1x_3+x_1^2+y_3^2-2y_1y_3+y_1^2\\
x_2^2-2x_1x_2+x_1^2+y_2^2-2y_1y_2+y_1^2 &= x_3^2-2x_2x_3+x_2^2+y_3^2-2y_2y_3+y_2^2\\
x_3^2-2x_1x_3+x_1^2+y_3^2-2y_1y_3+y_1^2 &= x_3^2-2x_2x_3+x_2^2+y_3^2-2y_2y_3+y_2^2
\end{aligned}$$

denklem sistemi bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$x_2^2-2x_1x_2+y_2^2-2y_1y_2=x_3^2-2x_1x_3+y_3^2-2y_1y_3$$
$$x_1^2-2x_1x_2+y_1^2-2y_1y_2=x_3^2-2x_2x_3+y_3^2-2y_2y_3$$
$$x_1^2-2x_1x_3+y_3^2-2y_1y_3=x_2^2-2x_2x_3+y_2^2-2y_2y_3$$

sistemi bulunur. Bu sistemde 2. Denklemi ”-1” ile çarpıp sistemdeki tüm denklemleri toplarsak

$$y_1^2=y_3^2 \Rightarrow y_1=y_3 \vee y_1=-y_3$$

eşitlikleri bulunur.

$y_1=y_3 \vee y_1=-y_3$ ise $A(x_1,y_1)$ ve $C(x_3,y_3)$ noktaları elipsin üzerinde olduğundan

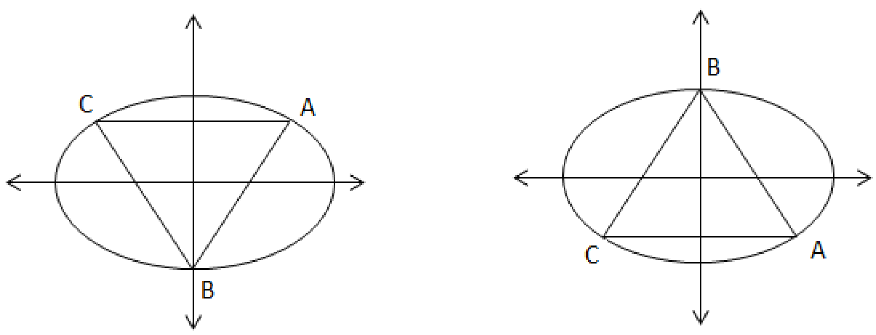
$$x_1=x_3 \text{ ve ya } x_1=-x_3$$

bulunur ki $x_1=x_3$ olduğunda A ve C noktaları aynı nokta olacağından bu noktalar $A(x_1,y_1)$ ve $C(-x_1,y_1)$ şeklinde bulunur. Bu durumda A ve C noktaları Oy eksenine göre simetrik olurlar. Ayrıca ABC üçgeni eşkenar üçgen olduğundan B köşesi de Oy ekseni üzerinde olmak zorundadır. Yani B köşesi $B(0,y_2)$ şeklinde olur. Bu noktayı elips denkleminde yerine yazarsak $y_2=b$ veya $y_2=-b$ bulunur, ancak $y_2=b$ için üçgen eşkenar olmaz. O yüzden ABC eşkenar üçgeninin köşeleri $A(x_1,y_1),\ B(0,-\mathrm{b})$ ve $C(-x_1,y_1)$ bulunur.

$y_1=-y_3$ durumu için ise ABC eşkenar üçgeninin köşelerinin

$$A(x_1,-y_1),\ B(0,\mathrm{b}) \text{ ve } C(-x_1,-y_1)$$

şeklinde olduğu benzer şekilde gösterilebilir.



Bu şekilde elde edilen bu iki eşkenar üçgenin eş üçgenler olduğu kolayca görülebilmektedir.

Peki bu şekilde kaç farklı eşkenar üçgen çizebiliriz?

Köşeleri $A(x_1,y_1),\ B(0,-\mathrm{b})$ ve $C(-x_1,y_1)$ olan ABC eşkenar üçgeni için $x_1\sqrt{3}-b=y_1$ olup A noktasının koordinatları $A\left(x_1,x_1\sqrt{3}-b\right)$ şeklinde olur. Bu nokta elipsin üzerinde olduğundan

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{\left(x_1\sqrt{3}-b\right)^2}{b^2}=1 \Rightarrow x_1^2b^2+a^2\left(x_1\sqrt{3}-b\right)^2=a^2b^2$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$x_1\left(x_1b^2+3a^2x_1-2a^2b\sqrt{3}\right)=0$$

elde edilir ki burada $x_1=0$ olamayacağından

$$x_1b^2+3a^2x_1-2a^2b\sqrt{3}=0 \Rightarrow x_1=\frac{2a^2b\sqrt{3}}{b^2+3a^2}$$

olmak zorundadır. O halde

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1\sqrt{3}-b=\frac{2a^2b\sqrt{3}}{b^2+3a^2}.\sqrt{3}-b \\ &= \frac{b\left(3a^2-b^2\right)}{3a^2+b^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ABC üçgeninin köşeleri

$$A\left(\frac{2a^2b\sqrt{3}}{3a^2+b^2},\frac{b\left(3a^2-b^2\right)}{3a^2+b^2}\right),\ B\left(0,-b\right)\ \text{ve C}\left(-\frac{2a^2b\sqrt{3}}{3a^2+b^2},\frac{b\left(3a^2-b^2\right)}{3a^2+b^2}\right) \qquad (1)$$

bulunur. Bu da ABC eşkenar üçgeninin tek türlü olduğunu gösterir.

Bu üçgenin çevresi;

$$Ç\left(\overset{\Delta}{ABC}\right)=6x_1=\frac{12\sqrt{3}a^2b}{b^2+3a^2}$$

Alanı ise

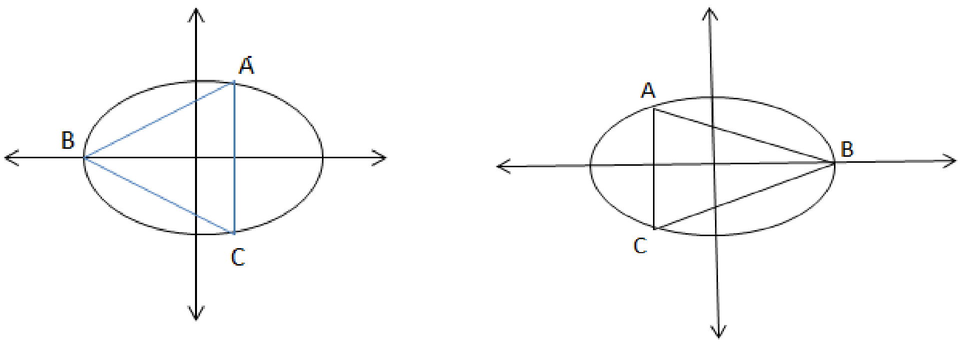
$$A\left(\overset{\Delta}{ABC}\right)=x_1^2\sqrt{3}=12\sqrt{3}\left(\frac{a^2b}{b^2+3a^2}\right)^2$$

şeklinde bulunur. Benzer işlemler köşe noktaları $A\left(x_1,-y_1\right),\ B\left(0,\text{b}\right)$ ve $C\left(-x_1,-y_1\right)$ olan ABC eşkenar üçgeni için de yapılabilir.

Şimdi de benzer şekilde $x_1=x_3$ ve ya $\text{y}_1=-y_3$ durumunu incelersek bu kez de ABC eşkenar üçgeninin köşeleri

$$A(x_1, y_1),\ B(-\mathrm{a},0) \text{ ve } C(x_1,-y_1) \text{ veya } A(-x_1, y_1),\ B(\mathrm{a},0) \text{ ve } C(-x_1,-y_1)$$

şeklinde olur.



Bu şekilde elde edilen yukarıdaki ABC eşkenar üçgenlerinin eş üçgenler oldukları da kolayca görülebilir.

Köşeleri $A(x_1, y_1),\ B(-\mathrm{a},0)$ ve $C(x_1,-y_1)$ olan ABC üçgeni için

$$y_1 = \frac{2\sqrt{3}ab^2}{a^2+3b^2}$$

olarak benzer şekilde hesaplanabilir. Buradan ise

$$x_1 = y_1\sqrt{3} - a = \frac{a\left(3b^2-a^2\right)}{3b^2+a^2}$$

bulunur. Böylece ABC üçgeninin köşelerinin koordinatları

$$A\left(\frac{a\left(3b^2-a^2\right)}{3b^2+a^2}, \frac{2\sqrt{3}ab^2}{b^2+3a^2}\right), B(-\mathrm{a},0) \text{ ve } C\left(\frac{a\left(3b^2-a^2\right)}{3b^2+a^2}, -\frac{2\sqrt{3}ab^2}{b^2+3a^2}\right) \qquad (2)$$

şeklinde bulunur. Buradan ise üçgenin çevresi için

$$Ç\left(\overset{\Delta}{ABC}\right) = 6y_1 = y_1 = \frac{12\sqrt{3}ab^2}{a^2+3b^2}$$

alanı için ise

$$A(ABC) = y_1^2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\left(\frac{ab^2}{a^2+3b^2}\right)^2$$

formülleri elde edilir.

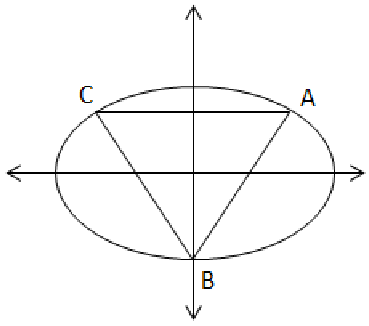
ÖRNEK: Köşeleri $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ elipsi üzerinde olabilecek eşkenar eşkenar üçgenlerin köşe noktalarını bulalım.

ÇÖZÜM:

Köşe noktaları elips üzerinde olacak şekilde 4 eşkenar üçgen çizilebileceğini göstermiştik. Şimdi bu üçgenleri inceleyelim.

i. ABC eşkenar üçgeninin köşeleri $A(x_1,y_1),B(0,-b),C(x_1,-y_1)$ şeklinde olabilir. Burada (1) den dolayı

$$x_1=\frac{2a^2b\sqrt{3}}{b^2+3a^2}=\frac{2.4.\sqrt{3}.\sqrt{3}}{3+3.4}=\frac{8}{5}$$



ve

$$y_1=x_1\sqrt{3}-b=\frac{8\sqrt{3}}{5}-\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{5}$$

bulunur. Böylece ABC eşkenar üçgeninin köşeleri

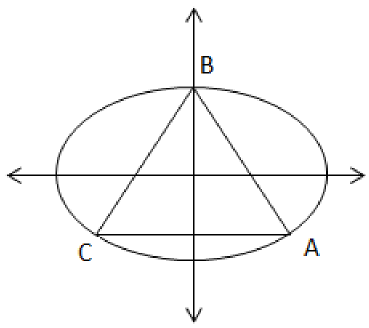
$$A\left(\frac{8}{5},\frac{3\sqrt{3}}{5}\right),B\left(0,-\sqrt{3}\right),C\left(-\frac{8}{5},\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$$

şeklinde bulunmuş olur.

ii. O halde ABC eşkenar üçgeninin köşeleri

$$A\left(\frac{8}{5},-\frac{3\sqrt{3}}{5}\right),B\left(0,\sqrt{3}\right),C\left(-\frac{8}{5},-\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$$

şeklinde olabilir.

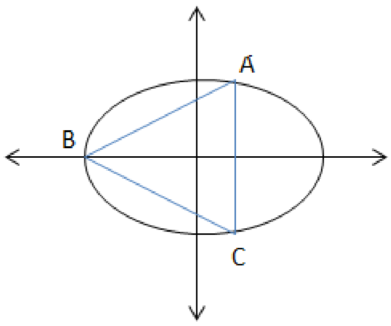


iii. Eşkenar üçgenin köşeleri

$$A(x_1,y_1),B(0,-b),C(x_1,-y_1)$$

şeklinde olursa eğer burada (2) den dolayı

$$y_1=\frac{2ab^2\sqrt{3}}{a^2+3b^2}=\frac{2.2.3.\sqrt{3}}{4+3.3}=\frac{12\sqrt{3}}{13}$$



ve

$$x_1=y_1\sqrt{3}-a=\frac{12\sqrt{3}}{13}.\sqrt{3}-2=\frac{10}{13}$$

bulunur. Böylece ABC üçgeninin köşeleri

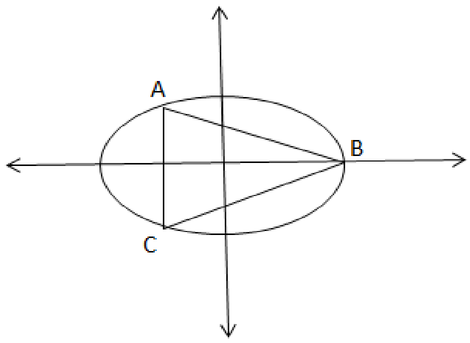
$$A\left(\frac{10}{13},\frac{12\sqrt{3}}{13}\right),B(-2,0),C\left(\frac{10}{13},-\frac{12\sqrt{3}}{13}\right)$$

şeklinde bulunmuş olur.

iv. Son olarak ta ABC eşkenar üçgeninin köşelerinin

$$A\left(-\frac{10}{13},\frac{12\sqrt{3}}{13}\right),B(2,0),C\left(-\frac{10}{13},-\frac{12\sqrt{3}}{13}\right)$$

şeklinde olabileceği görülebilir.



Böylece köşeleri soruda verilen elipsimizin üzerinde olan dört eşkenar üçgen de belirlenmiş olur.

ÖRNEK: Köşe noktaları $A\left(\frac{3}{7},\frac{8\sqrt{3}}{7}\right),B(-3,0),C\left(\frac{3}{7},-\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)$ olan ABC eşkenar üçgeninin köşe noktalarından geçen elipsin denklemini bulalım.

ÇÖZÜM:

B noktası x ekseni üzerinde olduğundan a=3 olmalıdır. Ayrıca (2) den dolayı

$$\frac{2\sqrt{3}.3.b^2}{3+3b^2}=\frac{8\sqrt{3}}{7}$$

olacağından b=2 bulunur. Böylece elipsimizin denklemi de

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

şeklinde elde edilmiş olur.

ÖRNEK:

Köşe noktaları $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$ elipsi üzerinde olan alanları farklı eşkenar üçgenlerin alanları toplamını bulalım

ÇÖZÜM:

Köşeleri elips üzerinde olan alanları farklı iki farklı üçgen olduğunu biliyoruz. Bu üçgenlerin alanlarına A_1 ve A_2 dersek

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= 12\sqrt{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2+3.3}\right)^2=\frac{216\sqrt{3}}{21} \\ A_2 &= 12\sqrt{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3+3.2}\right)^2=\frac{144\sqrt{3}}{81} \end{aligned}\right\}$$

bulunabilir.

Sonuç ve Tartışma:

Bu çalışmada köşeleri $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ elipsi üzerinde bulunan bir eşkenar üçgen yardımı ile köşeleri bu elips üzerinde olabilecek dört adet eşkenar üçgen bulunmuş ve bu eşkenar üçgenlerin ikişer ikişer birbirine eş oldukları tespit edildikten sonra eşkenar üçgenin ve elipsin temel özellikleri kullanılarak bu üçgenlerin alanları ve çevreleri gibi temel hesaplamalar yapılmıştır.

Bu çalışma da köşeleri bir elips üzerinde bulunan eşkenar üçgenler incelenmiş olup, diğer konikler için de benzer bir çalışma yapılabilir.

Kaynaklar:

1) Batson, H., " Konikler, En Doğal Halleriyle ", Matematik Dünyası, (2005) 2, 14-18.
2) Sonuç Yayınları 11.sınıf Geometri Fasikülleri